$\boxed{1}$

(1)

$\boxed{ア}$

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= a_{n+2} + \frac{1}{3}a_{n+1} \\
&= \left(\frac{1}{6}a_{n+1} + \frac{1}{6}a_n\right) + \frac{1}{3}a_{n+1} \quad \because a_{n+2} = \frac{1}{6}a_{n+1} + \frac{1}{6}a_n \\
&= \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{6}a_n \\
&= \frac{1}{2}\left(a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n\right) \\
&= \frac{1}{2}b_n
\end{aligned}
$$

$\boxed{イ}$

$$b_n = \frac{1}{2}b_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 b_{n-2} = \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} b_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_2 + \frac{1}{3}a_1\right) = 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2)

$\boxed{ウ}$

$$
\begin{aligned}
c_{n+1} &= a_{n+2} - \frac{1}{2}a_{n+1} \\
&= \left(\frac{1}{6}a_{n+1} + \frac{1}{6}a_n\right) - \frac{1}{2}a_{n+1} \\
&= -\frac{2}{6}a_{n+1} + \frac{1}{6}a_n \\
&= -\frac{2}{6}\left(a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n\right) \\
&= -\frac{1}{3}c_n
\end{aligned}
$$

$\boxed{エ}$

$$c_n = -\frac{1}{3}c_{n-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 c_{n-2} = \cdots = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} c_1 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(a_2 - \frac{1}{2}a_1\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

補足

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ とおくと,

$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$

$a_{n+2}=\frac{1}{6}a_{n+1}+\frac{1}{6}a_n$ より,

$\alpha+\beta=\frac{1}{6}$，　$\alpha\beta=-\frac{1}{6}$

これは，α，β が方程式 $x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$ の解であることを示す。

よって，$(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$，$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

したがって,

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ は,

$(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$ のとき

$$a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1}=-\frac{1}{3}\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)$$

$(\alpha,\beta)=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ のとき

$$a_{n+2}+\frac{1}{3}a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n\right)$$

(3)

$\boxed{\text{オ}}$

$b_n = a_{n+1} + \frac{1}{3} a_n$， $b_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$c_n = a_{n+1} - \frac{1}{2} a_n$， $c_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

より，

$$\begin{cases} a_{n+1} + \frac{1}{3} a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \cdots ① \\ a_{n+1} - \frac{1}{2} a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} & \cdots ② \end{cases}$$

①－②より， $\frac{5}{6} a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって， $a_n = \frac{6}{5}\left\{6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$\boxed{\text{カ}}$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \frac{6}{5} \sum_{k=1}^{n} \left\{6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\} \\ &= \frac{6}{5}\left\{6 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}\right\} \\ &= \frac{6}{5}\left\{12 - 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\} \\ &= \frac{27}{2} - \frac{72}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{9}{10}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{27}{2} - \frac{9 \cdot 2^3}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3^2}{10}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{27}{2} - \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{27}{2} - \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(1)

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\log_a \frac{x}{a^3}\right)^2 + \log_a\left(a^3x^3\right) \\
&= \left(\log_a x - \log_a a^3\right)^2 + \log_a a^3 + \log_a x^3 \\
&= \left(\log_a x - 3\log_a a\right)^2 + 3\log_a a + 3\log_a x \\
&= (t-3)^2 + 3 + 3t \\
&= t^2 - 3t + 12
\end{aligned}
$$

$a > 1$，$a \le x \le a^4$ より，

$\log_a a \le \log_a x \le \log_a a^4$

よって，

$1 \le t \le 4$

(2)

$y = t^2 - 3t + 12 = \left(t - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{39}{4}$，$1 \le t \le 4$ より，

$t = 4$ のとき，すなわち $x = a^4$ のとき，y は最大値 16 をとる。

$t = \dfrac{3}{2}$ のとき，すなわち $x = a^{\frac{3}{2}} = a\sqrt{a}$ のとき，y は最小値 $\dfrac{39}{4}$ をとる。

(3)

$\log_a x = t$ とおくと，

$t^2 - 3t + 12 = kt - 4k + 14$，$1 \le t \le 4$ を満たす 2 つの実数解が存在すればよい。

ここで，

$t^2 - 3t - 2 = k(t-4)$，$1 \le t \le 4$

とし，

$y = f(t) = t^2 - 3t - 2 = \left(t - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{17}{4}$，$1 \le t \le 4$

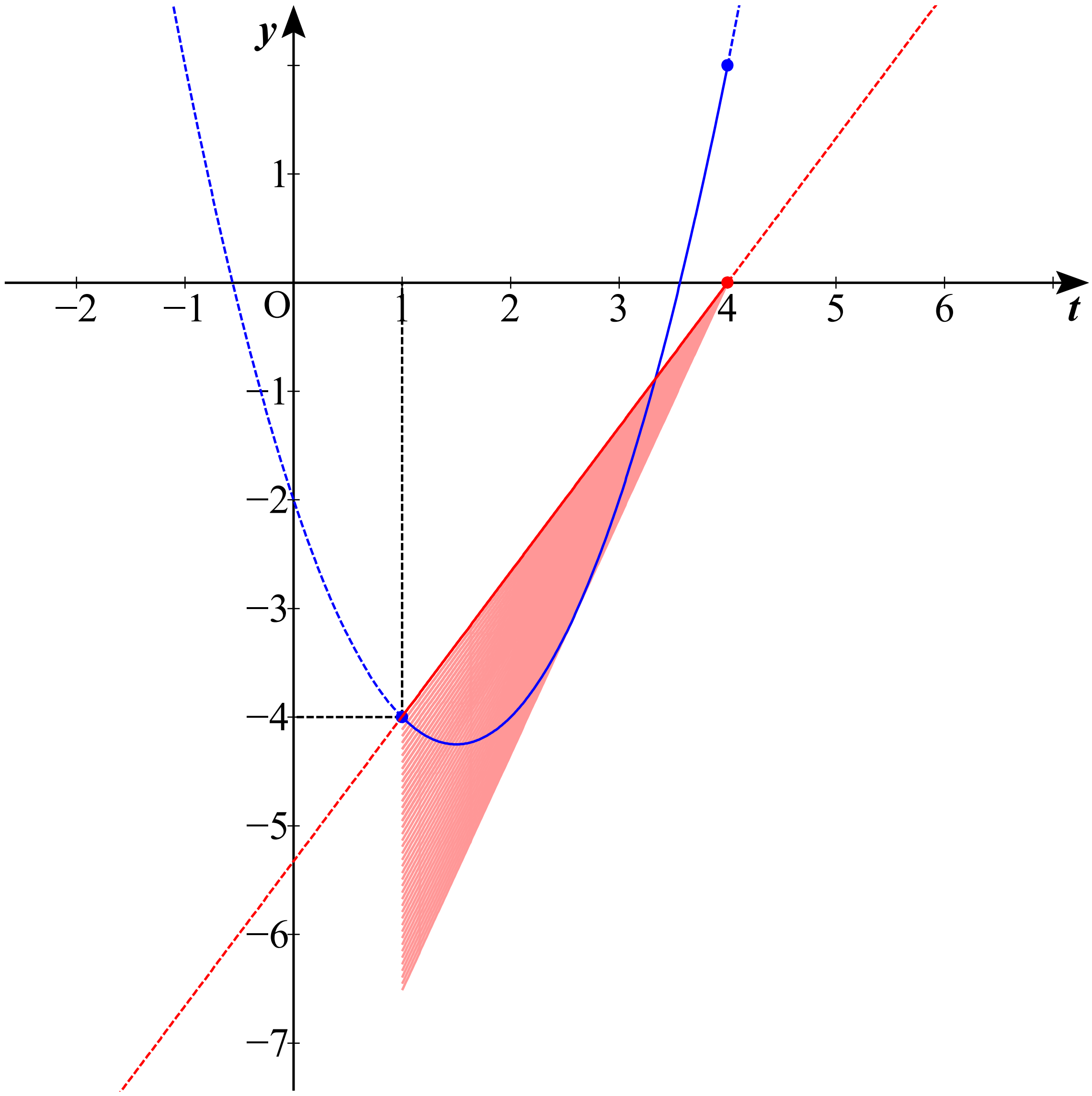
$y = g(t) = k(t-4)$，$1 \le t \le 4$

とおくと，

$t^2 - 3t + 12 = kt - 4k + 14$，$1 \le t \le 4$ を満たす 2 つの実数解が存在することと

$f(t)$ と $g(t)$ が 2 つの共有点をもつことは同値だから，

$f(t)$ と $g(t)$ が 2 つの共有点をもつ条件を調べることにする。



$f(t)$ は $\left(\frac{3}{2}, -\frac{17}{4}\right)$ を頂点とする 2 次関数，$g(t)$ は定点 $(4,0)$ を通る傾き k の直線を表す。

まず，$f(t)$ と $g(t)$ が接するときの t の値を求める。

これは，$t^2 - 3t + 12 = kt - 4k + 14$，すなわち $t^2 - (k+3)t + 4k - 2 = 0$ が

$1 \leq t \leq 4$ において重解をもつことと同値である。

よって，判別式を D とすると，

$D = (k+3)^2 - 4(4k-2) = k^2 - 10k + 17 = 0$

$k = 5 \pm 2\sqrt{2}$　・・・①

$t^2 - (k+3)t + 4k - 2 = 0$，$1 \leq t \leq 4$ の重解を α とすると，

解と係数の関係より，

$2\alpha = k + 3$

これと$1 \le \alpha \le 4$より，
重解をもつときのkが満たすべきの必要条件は，

$$1 \le \alpha = \frac{k+3}{2} \le 4$$

よって，
$-1 \le k \le 5$　・・・②
①，②より，
$k = 5 - 2\sqrt{2}$
また，$g(t)$が点$(1, f(1)) = (1,-4)$を通るとき，$-4 = k(1-4)$より，$k = \frac{4}{3}$
よって，グラフより，
$\frac{4}{3} \le k < 5 - 2\sqrt{2}$のとき，$f(t)$と$g(t)$は2つの共有点をもつ。
また，
$x_1 x_2$の最小値については，
$a > 1$より，$x_1 x_2$が最小値をとるとき，$\log_a x_1 x_2$も最小値をとる。
$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2 = t_1 + t_2$とおくと，
t_1，t_2は$t^2 - (k+3)t + 4k - 2 = 0$，$1 \le t \le 4$の解だから，
解と係数の関係より，
$t_1 + t_2 = k + 3$
$\frac{4}{3} \le k < 5 - 2\sqrt{2}$だから，

$t_1 + t_2$すなわち，$\log_a x_1 x_2$は$k = \frac{4}{3}$のとき最小値$\frac{13}{3}$をとる。
ゆえに，
$x_1 x_2$は$k = \frac{4}{3}$のとき最小値$a^{\frac{13}{3}}$をとる。
以上より，
$\frac{4}{3} \le k < 5 - 2\sqrt{2}$

$x_1 x_2$の最小値は$a^{\frac{13}{3}}$で，そのときのkの値は$\frac{4}{3}$

$\boxed{3}$

(1)

任意の実数 A に対して

（ｉ）

$|A|+A\geq 0$ （等号は $A\leq 0$）であることについて

$A\geq 0$ のとき，

$|A|+A=A+A=2A\geq 0$

$A\leq 0$ のとき，

$|A|+A=-A+A=0$

（ⅱ）

$|A|-A\geq 0$ （等号は $A\geq 0$）であることについて

$A\geq 0$ のとき，

$|A|-A=A-A=0$

$A\leq 0$ のとき，

$|A|-A=-A-A=-2A\geq 0$

（ｉ）（ⅱ）より，題意が示された。

(2)

$$I=\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^c|f(x)|dx+\int_c^d|f(x)|dx+\int_d^1|f(x)|dx$$

ここで，$f(x)$ は任意の x 対し実数であるから(1)より，

$|f(x)|\geq -f(x)$（等号は $f(x)\leq 0$ のとき）

$|f(x)|\geq f(x)$（等号は $f(x)\geq 0$ のとき）

がなりたつから，

$$\begin{aligned}\int_0^c|f(x)|dx+\int_c^d|f(x)|dx+\int_d^1|f(x)|dx &\geq \int_0^c f(x)dx+\int_c^d\{-f(x)\}dx+\int_d^1 f(x)dx\\ &=\int_0^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^1 f(x)dx\\ &=J\end{aligned}$$

よって，

$I\geq J$

また，等号がなりたつのは，

$0\leq x\leq c$， $d\leq x\leq 1$ において $f(x)\geq 0$ かつ $c\leq x\leq d$ において $f(x)\leq 0$ の場合である。

(3)

$$J=\int_0^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^1 f(x)dx$$
$$=\int_0^c f(x)dx+\int_d^c f(x)dx+\int_d^1 f(x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^c+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_d^c+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_d^1$$
$$=\frac{2}{3}c^3+ac^2+2bc-\frac{2}{3}d^3-ad^2-2bd+\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b$$
$$=a\left(c^2-d^2+\frac{1}{2}\right)+b(2c-2d+1)+\frac{1}{3}\left(2c^3-2d^3+1\right)$$

よって，

a の係数 $=c^2-d^2+\dfrac{1}{2}$

b の係数 $=2c-2d+1$

さらに，

J の値が a， b の値に関係なく一定値になるのは，

a， b それぞれの係数が 0 の場合だから，

$c^2-d^2+\dfrac{1}{2}=0$ ・・・①

かつ

$2c-2d+1=0$ ・・・②

①より， $(c+d)(c-d)=-\dfrac{1}{2}$ ・・・③

②より， $c-d=-\dfrac{1}{2}$ ・・・④

④を③に代入することより，

$c+d=1$ ・・・⑤

よって，

④，⑤より，

$c=\dfrac{1}{4}$， $d=\dfrac{3}{4}$

(4)

(3)より，

$f(x)=x^2+ax+b$ とすると，

任意の実数 a， b に対し，

$$\int_0^1 |f(x)|dx \geq \int_0^{\frac{1}{4}} f(x)dx - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)dx + \int_{\frac{3}{4}}^1 f(x)dx$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 1\right\}$$

$$= \frac{1}{16}$$

がなりたつ。

等号が成立するのは,

$0 \leq x \leq \frac{1}{4}$， $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$ のとき $f(x) \geq 0$ かつ $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ のとき $f(x) \leq 0$ の場合であり，

これは， $f(x)=0$ の解が $x=\frac{1}{4}$， $\frac{3}{4}$ であることを意味する。

よって，解と係数の関係より，

$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=-a$， $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=b$

$a=-1$， $b=\frac{3}{16}$

ゆえに,

$a=-1$， $b=\frac{3}{16}$ のとき，最小値 $\frac{1}{16}$ をとる。